

Cours 15

Application du Thm de str. de modules de t.f. sur ann. principal

- $V: K\text{-e.v.}$ $f \in \text{End}_K(V)$, $\text{on suppose } \dim_K V < \infty$
 $(V, f) \rightsquigarrow K[T]\text{-module } V$

Thm ^{Ch. 1} Isom de $K[T]\text{-modules}$

(Version 1) $V \simeq K[T]/(P_1) \oplus \dots \oplus K[T]/(P_m)$

pour polynômes $P_1, \dots, P_m \in K[T]$

avec $P_1 | P_2 | \dots | P_m$

(Version 2) $V \simeq K[T]/(Q_1^{v_1}) \oplus \dots \oplus K[T]/(Q_r^{v_r})$

avec Q_i polynôme irréductible
 $v_i \geq 1$

Cor (Thm de Cayley-Hamilton)

Soit M une matrice $n \times n$ à coeff. dans K

Soit $\chi_M(X)$ le polynôme caractéristique de M .

ii
 $\det(X \cdot \text{Id} - M) = \det \begin{pmatrix} X - m_{11} & -m_{12} & \dots & -m_{1n} \\ -m_{21} & X - m_{22} & & -m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -m_{n1} & -m_{n2} & \dots & X - m_{nn} \end{pmatrix} \in K[X]$

Alors $\chi_M(M) = O_{n \times n}$

Pf en L2: On considère $\overline{K}$ la clôture algébrique de K

(L2 $\Rightarrow$ $\exists P \in GL_n(\overline{K})$ tq $PMP^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_r & \\ & & & \boxed{\lambda_{r+1} \dots \lambda_n} \end{pmatrix}$)
 (Dunford-Jordan)

$$\chi_M(X) = \chi_{PMP^{-1}}(X) = \underbrace{(X - \lambda_1)^{m_1} \cdots (X - \lambda_r)^{m_r}}$$

$$\chi_M(M) = P^{-1} \underbrace{\chi_M(PMP^{-1})} P = P^{-1} \left(\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 I & * \\ \hline 0 & * \end{array} \right)^{m_1} \cdots \left(\begin{array}{c|c} \lambda_r I & * \\ \hline 0 & * \end{array} \right)^{m_r} \right) P$$

$$= P^{-1} \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & * \end{array} \right)^{m_1} \cdots \left(\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & \boxed{0} \end{array} \right)^{m_r} P$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_m = 0$$

$$= P^{-1} \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & * & 0 \\ \hline 0 & \boxed{*} & * \end{array} \right) \cdots \left(\begin{array}{c|c|c} * & 0 & 0 \\ \hline 0 & * & 0 \\ \hline 0 & \boxed{*} & \boxed{0} \end{array} \right) P$$

$$= 0$$

□

Preuve (sans $\mathbb{K}$):

Thm $\Rightarrow \exists$ une base de V tq la matrice de M devient

$$\left(\begin{array}{c|cc} * & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \hline 0 & * & \boxed{0} \\ \hline 0 & 0 & \boxed{*} \end{array} \right)$$

avec chaque bloc $(*) = \begin{pmatrix} 0 & & 0 & * \\ & 0 & & * \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & * \end{pmatrix}$

Exercice: $B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & * \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & * \end{pmatrix}$

$$\chi_B(B) = 0$$

(Indication: $\det \begin{pmatrix} X & \dots & -* \\ -1 & X & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & X & -* \end{pmatrix} = \dots$) $\square$

Cor (Thm Dunford-Jordan)

$\mathbb{K}$: Corps algébriquement clos (e.g. $\mathbb{C}$)

$$M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$$

alors $\exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ ∇

$$PMP^{-1} = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

avec chaque bloc $(*) = \begin{pmatrix} \lambda & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$

Première: $K[T]$ est principal

• $V := K^n$ est un $K[T]$ -module

↑

Thm (version 2)
comme $K[T]$ -mod.

$$V \simeq \frac{K[T]}{(Q_1^{v_1})} \oplus \dots \oplus \frac{K[T]}{(Q_r^{v_r})}$$

où $Q_i \in K[T]$ polynôme irr. dans $K[T]$
de degré ≥ 1 .

$$v_i \in \mathbb{Z}_{>0}$$

K algébriquement clos $\Rightarrow Q_i = T - \lambda_i$ avec $\lambda_i \in K$.

$$\Rightarrow V \simeq \frac{K[T]}{(T - \lambda_1)^{v_1}} \oplus \dots \oplus \frac{K[T]}{(T - \lambda_r)^{v_r}}$$

comme $K[T]$ -modules

$\Rightarrow$ la matrice de $f \in V$ est conjuguée

à la matrice de $\bar{T} \in \frac{K[T]}{(T - \lambda_1)^{v_1}} \oplus \dots \oplus \frac{K[T]}{(T - \lambda_r)^{v_r}}$

Écrivons cette matrice :

on choisit la base $1, \bar{T} - \lambda_i, (\bar{T} - \lambda_i)^2, \dots, (\bar{T} - \lambda_i)^{v_i-1}$

(Exo: c'est une base)

calcul:

$$\overline{T} \cdot \underline{1} = 1 \cdot (\underline{\overline{T} - \lambda_i}) + \lambda_i \cdot \underline{1}$$

$$\overline{T} \cdot (\underline{\overline{T} - \lambda_i}) = 1 \cdot (\underline{\overline{T} - \lambda_i})^2 + \lambda_i (\underline{\overline{T} - \lambda_i})$$

$$\overline{T} \cdot (\underline{\overline{T} - \lambda_i})^2 = 1 \cdot (\underline{\overline{T} - \lambda_i})^3 + \lambda_i (\underline{\overline{T} - \lambda_i})^2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\overline{T} \cdot (\underline{\overline{T} - \lambda_i})^{v_i-1} = 1 \cdot (\underline{\overline{T} - \lambda_i})^{v_i} + \lambda_i \cdot (\underline{\overline{T} - \lambda_i})^{v_i-1}$$

$\Downarrow$

$\Rightarrow$ la matrice =

$$\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{T - \lambda_i} & \dots & (\overline{T - \lambda_i})^{v_i-1} \\ \lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & 1 & \dots & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_i \\ & & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{T - \lambda_i} \\ \vdots \\ (\overline{T - \lambda_i})^{v_i-1} \end{pmatrix}$$



§ Produit tensoriel

⚠ f n'est pas un morphisme de gp :
 $f(n, m) + f(n', m') \neq f(n+n', m+m')$

Thm Soit A un an. (unitaire)
 Soient $M \in {}_A \text{Mod}$, $N \in \text{Mod}_A$

Alors il existe un groupe abélien T
 muni d'une app. A -bil.

$$N \times M \xrightarrow{\phi} T$$

tg il vérifie la propriété universelle suivante.

$\forall$ L groupe abélien

$\forall$ application A -bilineaire

$$f: N \times M \xrightarrow{f} L$$

$\exists !$ morphisme de gp abélien $\bar{f}: T \rightarrow L$

$$tg \quad f = \bar{f} \circ \phi$$

ie. on a un diagramme commutatif:

$$N \times M \xrightarrow{\phi} T$$

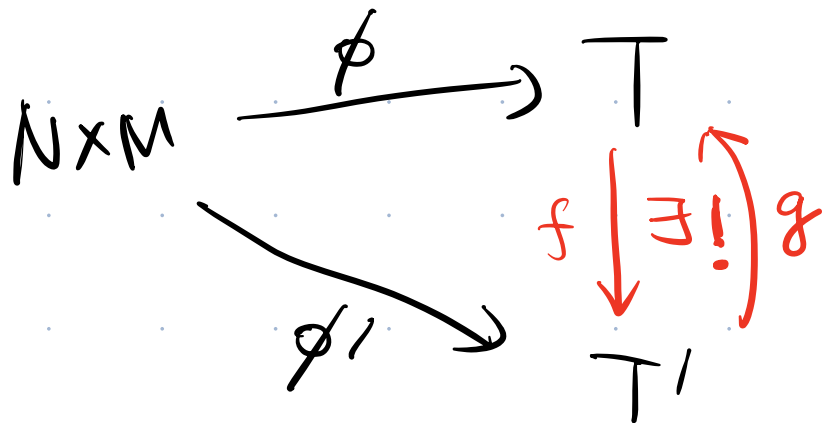
$$\begin{array}{ccc} & & \bar{f} \downarrow \exists ! \\ & \searrow f & \\ & & L \end{array}$$

Déf. Le gp abélien T dans $\mathcal{Thm}$
 (muni de $\phi: N \times M \longrightarrow T$)
 est appelé "le" produit tensoriel
 de N et M , noté $N \otimes_A M$

Rq Supposons l'existence dans $\mathcal{Thm}$.
 Alors on a "l'unicité" suivante :

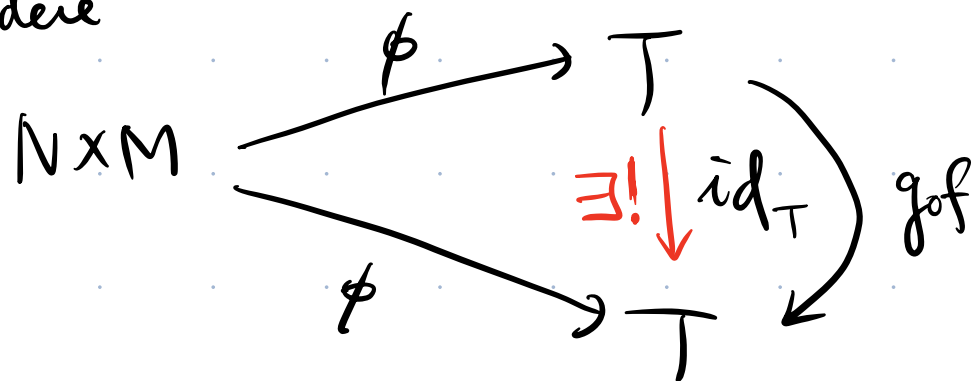
Si on a un autre gp abélien T
 muni de $\phi': N \times M \longrightarrow T$
 qui vérifie la même propriété universelle.

alors



$$\begin{aligned}
 \text{fg} \quad \begin{cases} f \circ \phi = \phi' \\ g \circ \phi' = \phi \end{cases} & \implies (g \circ f) \circ \phi = g \circ (f \circ \phi) \\
 & = g \circ \phi' \\
 & = \phi
 \end{aligned}$$

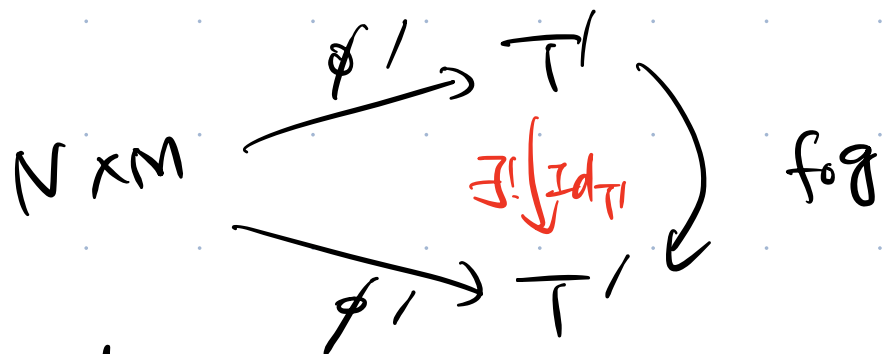
On considère



l'unicité $\Rightarrow$

$$g \circ f = \text{id}_T$$

on considère



l'unicité $\Rightarrow$

$$f \circ g = \text{id}_{T'}$$

$$\Rightarrow T \xrightleftharpoons[f]{g} T'$$

et les Bom. compatibles avec ϕ, ϕ' sont uniques.

Donc on dit que

"le produit tensoriel est unique à unique Bom. près"

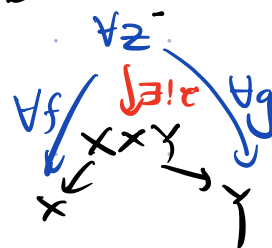
ceci justifie le mot "le".

Rq: C'est un phénomène général:

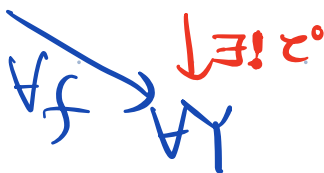
• Topologie; • topologie de sous-espace

• topologie produit.

• topologie quotient.

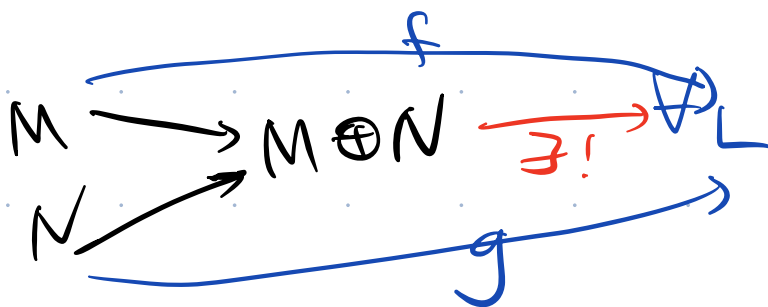


e.g. $X \xrightarrow{q} X/\sim$



tg f constant
en chaque classe
d'équivalence
pour $\sim$.

• Algèbre, $\oplus$ de modules, gp. abél.



Démonstration du Thm (Existence)

$M \in {}_A \text{Mod}$, $N \in \text{Mod}_A$

On considère le groupe abélien

$$T := \frac{\mathbb{Z} \cdot \{ (n, m) \mid (n, m) \in N \times M \}}{S}$$

où $\mathbb{Z} \cdot \{ (n, m) \}$ est le gp abélien libre engendré par l'ensemble $N \times M$.

S est le sous-gp de $\mathbb{Z} \cdot \{ (n, m) \}$ engendré

$$\text{par } \left\{ \begin{array}{l} \bullet (n, m) + (n', m) - (n+n', m) \quad \forall n, n', m \\ \bullet (n, m) + (n, m') - (n, m+m') \\ \bullet (na, m) - (n, am) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \forall n, n', m \\ \forall n, m, m' \\ \forall a \in A \\ \forall n, m \end{array}$$

On définit une application

$$\begin{array}{ccc} \phi: N \times M & \longrightarrow & T \\ (n, m) & \longmapsto & [(n, m)] \end{array}$$

Vérifions que ϕ est A-bilinéaire.

$$\begin{array}{ccc} \bullet \phi(n, m) + \phi(n, m') & \stackrel{?}{=} & \phi(n, m+m') \\ \parallel & & \parallel \\ [(n, m)] + [(n, m')] & & [(n, m+m')] \\ \parallel & & \\ [(n, m) + (n, m')] & \stackrel{=}{=} & \text{car } (n, m) + (n, m') - (n, m+m') \in S \end{array}$$

- même calcul pour (EXO)

$$\phi(n, m) + \phi(n', m) = \phi(n+n', m)$$

- $\phi(na, m) = [na, m]$
 $\phi(n, am) = [n, am]$

Preuve de la propriété universelle :

$$N \times M \xrightarrow{\phi} T$$

$\searrow \forall f$
 $\forall L$

$\exists !$
 $\downarrow$

avec f une app. A -bilineaire

On considère

$$\mathbb{Z} \cdot \{ (n, m) \mid (n, m) \in N \times M \} \xrightarrow{\tilde{f}} L$$

$$(n, m) \longmapsto f(n, m)$$

comme $\tilde{f}((n, m) + (n', m) - (n+n', m)) = f(n, m) + f(n', m) - f(n+n', m) = 0$

De même $\tilde{f}((n, m) + (n, m') - (n, m+m')) = 0$ $\nearrow f$ est bil.

$$\hat{f}((n_1, m) - (n, am)) = 0.$$

$$\Rightarrow S \subset \ker(\hat{f})$$

$\Rightarrow$ on a un morphisme de groupe.

$$T = \frac{\mathbb{Z} \cdot N \times M}{S} \xrightarrow{\bar{f}} L$$

on vérifie que $\bar{f} \circ \phi = f$

et c'est unique qui vérifie cette

propriété car T est engendré par $[(n, m)]$

□

Q : c'est quoi un élément
dans $N \otimes_A M$?

Réponse : Un élément de $N \otimes_A M$
est une combinaison $\mathbb{Z}$ -linéaire de

d'élément de la forme $[n, m]$.

typiquement :

$$x = \sum_{i=1}^r c_i [n_i, m_i], \quad c_i \in \mathbb{Z}$$

Non typiquement : $[n, m]$.

Pire : c'est difficile de déterminer

$$\sum_{i=1}^r c_i [n_i, m_i] \stackrel{?}{=} \sum_{j=1}^{r'} c'_j [n'_j, m'_j]$$

ensembles purs
↓

Notation : $[n, m] = : n \otimes m$

Donc un élément typique de $N \otimes_A M$
est de la forme

$$x = \sum_{i=1}^r c_i n_i \otimes m_i \quad c_i \in \mathbb{Z}$$